Aufgabe 1: Hauptkomponentenanalyse

(Eigenwert)

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X}$ mit den Beobachtungen

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Schätzen Sie die Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{xx}$ und die Autokovarianzmatrix $\mathbf{C}_{xx}$ aus den Beobachtungen $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- Diagonalisieren Sie die Autokovarianzmatrix $\mathbf{C}_{xx}$, d. h. bringen Sie sie in die Form $\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^T$ mit $\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{I}$ und $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Lösung

- Es liegen $M = 4$ Beobachtungen x_i vor. Die Autokorrelationsmatrix ergibt sich aus

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{M} \mathbf{E}\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\},$$

mit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & 3 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{X}^H = \mathbf{X}^{*T}.$$

Die Schätzung von $\mathbf{R}_{xx}$ lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &\approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \\ &= \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 10,5 \\ 10,5 & 12,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 1,5 \\ 1,5 & 0,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 44 & 28 \\ 28 & 22,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 5,625 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Autokovarianzmatrix wird zunächst der Mittelwert des stochastischen Prozesses benötigt. Dieser berechnet sich zu

$$\boldsymbol{\mu}_x \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Die Schätzung der Autokovarianzmatrix lautet

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{R}_{xx} - \boldsymbol{\mu}_x \boldsymbol{\mu}_x^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1,625 \end{bmatrix}.$$

- b) Zur Diagonalisierung der Autokovarianzmatrix müssen zunächst die Eigenwerte bestimmt werden. Dies erfolgt durch Lösen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C}_{xx} - \lambda \mathbf{I}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1,625 - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (2 - \lambda)(1,625 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3,625\lambda + 2,25 \\ &\stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2,83$ und $\lambda_2 = 0,795$.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ muss jeweils folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$(\mathbf{C}_{xx} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Für den Eigenwert $\lambda_1 = 2,83$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}-0,83v_{11} + v_{12} &= 0 \\ v_{11} - 1,205v_{12} &= 0.\end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem, für das unendlich viele Lösungen existieren. Es wird daher der Eigenvektor mit der Länge eins bestimmt

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2} = 1. \tag{L1}$$

Mit Hilfe dieser Bedingung erhält man den Eigenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,7695 \\ 0,6386 \end{bmatrix}.$$

Der Eigenvektor zu $\lambda_2 = 0,795$ lässt sich analog dazu aus folgendem Gleichungssystem bestimmen:

$$\begin{aligned}1,205v_{21} + v_{22} &= 0 \\ v_{21} + 0,83v_{22} &= 0 \\ \|\mathbf{v}_2\| &= 1\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,6386 \\ 0,7695 \end{bmatrix}.$$

Es ist zu erkennen, dass die Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ orthogonal zueinander sind.

Die Diagonalisierung der Autokovarianzmatrix lautet schließlich

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 0,7695 & -0,6386 \\ 0,6386 & 0,7695 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7695 & 0,6386 \\ -0,6386 & 0,7695 \end{bmatrix}.$$